Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Feuille 3
Indépendance, Borel-Cantelli, fonctions génératrices

Indépendance

Exercice 1. Soient X, Y deux va réelles et y,a,b trois paramètres réels tels que $y \neq 0$, $y \neq 1$ et que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau suivant

$X \setminus Y$	y	0	1
0	1/4	a	1/4
1	1/6	b	1/6

(1) Déterminer les lois respectives de X et Y.

(2) Déterminer a et b de sorte que X et Y soient indépendantes.

(3) On suppose que $a = 1/6$. Que vaut b ? Comment peut-on alors choisir y pour avoir $Cov(X, Y) = 0$? Les variables X et Y sont elles alors indépendantes ?

Exercice 2. On jette deux dés équilibrés. On désigne par X et Y le maximum et le minimum des points obtenus.

(1) Décrire l'espace de probabilité associé à cette expérience.

(2) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(3) En déduire les lois de X et de Y.

(4) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. On suppose que le nombre N d'oeufs pondus par un batracien suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, on suppose que les oeufs pondus ont une évolution indépendante les uns des autres, et que chaque oeuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. On note X le nombre d'oeufs éclos.

(1) Déterminez la loi du couple aléatoire (X, N).

(2) En déduire la loi de X.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes binomiales de paramètres respectifs (m, p) et (n, p). Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 5. Même question si X et Y sont deux v.a. indépendantes de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. En déduire quelle est la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = k$, $k \in \mathbb{N}$?

Exercice 6. Soient X et Y des v.a. indépendantes valeurs dans $\mathbb{N}$, avec

$$P(X = i) = P(Y = i) = 2^{-i} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Trouver les probabilités des événements suivants :

(1) $P(\min(X, Y) \leq i)$

(2) $P(X = Y)$

(3) $P(Y > X)$

(4) $P(X \geq kY)$ pour un entier $k \geq 1$.

Exercice 7. Soient X et Y deux v.a. qui ne prennent chacune que deux valeurs réelles. Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $E(XY) = E(X)E(Y)$ (*On pourra commencer par considérer le cas où X et Y prennent leurs valeurs dans* $\{0, 1\}$).

Exercice 8. X une v.a. de loi géométrique "gauche" de paramètre λ (i.e. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $P(X = n) = (1 - \lambda)\lambda^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$) et Y une v.a. indépendante de loi géométrique "gauche" de paramètre μ. Soit $Z = \min(X, Y)$. Montrer que Z suit une loi géométrique "gauche" et trouver son paramètre.

Exercice 9. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de même loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Soit $Z = XY$. Montrer que X, Y, Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas indépendantes dans leur ensemble.

Exercice 10. Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots n$. S'il réussit son saut, il passe à la hauteur suivante, sinon il s'arrête. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux, et que la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$. On note X la va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ représentant le dernier saut effectué (où le sauteur échoue donc).

(1) Quelle est la loi de probabilité de X ? Vérifier par un calcul qu'on a bien $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 11. Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $P(X+Y=\alpha)=1$, où α est une constante. Montrer que X et Y sont p.s. des constantes (Indication : étudier la fonction de répartition de X). Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus X et Y indépendantes ?

Exercice 12. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ si $x,y\geq 0$ et 0 sinon.

(1) Déterminer les densités marginales de X et Y.

(2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 13. Mêmes questions que ci-dessus si $f(x,y)=2e^{-(x+y)}$ quand $0\leq x\leq y$ et 0 sinon.

Exercice 14. Soient X_1,..., X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de M_n. Montrer que M_n admet une densité que l'on déterminera.

Exercice 15. Soient U et V deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(1) Calculer la densité de $U+V$. Sa loi est appelée *loi triangulaire*. Pourquoi ?

(2) Calculer la fonction caractéristique φ_{U+V}.

Exercice 16. Montrer que si X et Y sont des v.a. indépendantes et de même loi, alors $Z=X-Y$ a une loi symétrique (i.e. Z et $-Z$ ont même loi).

Exercice 17. Soient X et Y des v.a. normales centrées réduites indépendantes. Montrez que les v.a. $X+Y$ et $X-Y$ sont alors indépendantes.

Borel Cantelli

Exercice 18. On considère l'espace de probabilité $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Etudier $\sum_n \lambda(A_n)$ et calculer $\lambda(\limsup_n A_n)$ où $A_n=[0,1/n]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 19. On jette indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité de faire une infinité de fois deux piles consécutifs ? Etudier également le cas où la pièce n'est pas équilibrée.

Exercice 20. On suppose qu'un singe placé devant une machine à écrire tape chaque lettre avec la même probabilité et de manière indépendante. Montrer que tôt ou tard il finira par écrire n'importe quel poème de Verlaine. Le résultat reste-il vrai si l'on suppose que les lettres ne sont pas toutes tapées avec la même probabilité ?

Exercice 21. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ et $(A_n)_{n\geq 0}$ les événements $A_n=\{X_n\geq \alpha\ln n\}$ où $\alpha>0$. Calculer $P(\limsup A_n)$.

Exercice 22. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que la mesure des entiers divisibles par n vaut $1/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 23. Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que pour un certain $M>0$,

$$\int_X |f_n|^2 d\mu \leq M, \quad \forall n\geq 1.$$

Montrer qu'il existe un ensemble $N\in\mathcal{A}$ de mesure nulle tel que pour tout $x\in N^c$, à partir d'un certain rang, on ait $|f_n(x)|<n$.

Fonctions génératrices

Exercice 24. Soit $X_1,X_2,\ldots,X_n$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. Déterminer la loi de $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

Exercice 25. Soit $n\geq 0$ fixé, et $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n=\frac{\lambda}{n}$ pour un certain réel $\lambda>0$; $X_i=1$ modélise que le i-ème assuré subisse un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc $Y_n=X_1+\cdots+X_n$. On suppose que les X_i sont indépendants ; le fait que p_n soit petit lorsque n est grand modélise que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant le "nombre d'assurés sinistrés espéré".

(1) Soit Z v.a. de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la fonction génératrice g_Z de Z.

(2) Calculer la fonction génératrice g_{X_i} des X_i.

(3) Calculer la fonction génératrice g_{Y_n} de Y_n.

(4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} g_{Y_n}$; qu'en conclut-on ?

Exercice 26. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $S\colon \omega \mapsto S_{T(\omega)}(\omega)$.

(1) Montrer que $g_S = g_T \circ g_X$, où g_X est la fonction génératrice (commune) des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que si X_1 et T sont intégrables, alors $E(S) = E(T)E(X)$.

(3) On prend pour les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et pour T une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de S ?

Exercice 27. Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité $p \in]0,1[$ et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Le but du joueur est alors de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

(1) Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$.

(2) Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1).$$

(3) Déduire la valeur de $s_c(a)$ suivant que $p = 0,5$ ou $p \neq 0,5$.